$$\min.\ -\sum_i \log(b - Ax)$$

$$\Downarrow$$

$$\min.\ -\sum_i \log(y)$$

$$\text{s.t.}\ y = b - Ax$$

construct starting point

$$y_i = \begin{cases} b_i - a_i^T x & b_i - a_i^T x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min.\ -[0\ 1] \cdot \log\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.}\ [A\ I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, v\right) = -[0, 1] \cdot \log\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^T\left([A\ I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - b\right)$$

$$\begin{cases} \nabla\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta x \end{bmatrix}, v^+\right) \approx -\begin{bmatrix} 0 \\ 1/y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + [A\ I]^T v^+ := 0 \quad \} \text{ dual residual} \\ [A\ I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \quad \} \text{ primal residual} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A^T \\ 0 & H & I \\ A & I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ v^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/y \\ b - Ax - y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & A^T \\ 0 & H & I \\ A & I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T v \\ 1/y - v \\ b - Ax - y \end{bmatrix}$$

$$g = -1/y \qquad H = \text{diag}(1/y_i)$$

$$r_d = \begin{bmatrix} A^T v \\ g + v \end{bmatrix} \qquad r_p = y + Ax - b$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A^T \\ 0 & H & I \\ A & I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T v \\ 1/y - v \\ b - Ax - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T v \\ -g - v \\ -r_p \end{bmatrix}$$

$$dx \begin{cases} r_3 - H^{-1} r_2 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & A^T \\ 0 & H & I \\ A & 0 & -H^{-1} \end{bmatrix} \\ \\ r_1 + A^T H(r_3 - H^{-1} r_2) : \begin{bmatrix} A^T H A & 0 & 0 \\ 0 & H & I \\ A & I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T g - A^T H r_p \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ = r_1 + AH r_3 - A^T r_2 \end{cases}$$

$$dx = (A^T H A)^{-1}(A^T g - A^T H r_p)$$

$$dy\left\{ r_3:\ A\Delta x + \Delta y = -r_p \qquad \Delta y = -r_p - A\Delta x \right.$$

$$dv\left\{ r_2:\ H\Delta y + \Delta V = -g - V \qquad \Delta V = -H\Delta y - g - V \right.$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \end{bmatrix} \qquad \Delta z = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \end{bmatrix} \qquad r_d = \begin{bmatrix} A^T V \\ g + V \end{bmatrix} \qquad r_p = \begin{bmatrix} Ax + y - b \end{bmatrix} \qquad r(z) = \begin{bmatrix} r_d \\ r_p \end{bmatrix}$$

$$r(z+\Delta z) \approx r(z) + Dr(z)\cdot\Delta z := 0$$

$$Dr(z)\cdot\Delta z = -r(z)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & A^T \\ 0 & H & I \\ A & I & 0 \end{bmatrix}}_{Dr(z)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\|r(z+t\Delta z)\|_2^2\right|_{t=0} = 2r(z)^T Dr(z)\cdot\Delta z$$

$$= 2r(z)^T \cdot -r(z) = -2\|r(z)\|_2^2$$

$$\left.\frac{d}{dt}\|r(z+t\cdot\Delta z)\|_2^2\right|_{t=0} = 2\|r(z)\|_2 \cdot \left.\frac{d}{dt} r(z+t\cdot\Delta z)\right|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d}{dt} r(z+t\cdot\Delta z)\right|_{t=0} = -\|r(z)\|_2$$